

DS de mathématiques n°9

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices — Corrigé

Noté sur 105 pts ± 5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramenée sur 20 en multipliant par 20/93.

24,5 Exercice 1 : Trigonalisation de matrice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3x + y + z, 4y + 2z, x - y + 5z)$. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1,5 1) Donner la matrice A de l'application f dans la base β_0 .

Comme β_0 est la base canonique, on a immédiatement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

3 2) On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que (u_1, u_2, u_3) est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0, 0, 0)$$

On en déduit que $(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$, donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 - L_1 \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc la famille β est libre. Comme $\text{card}(\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 3) On note P la matrice de passage de la base β_0 vers la base β . Déterminer P et son inverse.

La matrice de passage de β_0 vers β s'obtient en écrivant les vecteurs de β en colonnes, donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que P est inversible et calculons P^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array}$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3,5 4) On note B la matrice de l'application f dans la base β . Déterminer B . Vérifier que B est de la forme $\lambda I_3 + T$ avec T une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont nuls.

On sait que

$$B = P^{-1}AP \quad (\text{i.e. } \text{Mat}_\beta(f) = P_{\beta \rightarrow \beta_0} \text{Mat}_{\beta_0}(f) P_{\beta_0 \rightarrow \beta})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B &= P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \mathcal{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que B est bien de la forme $\lambda I_3 + T$ avec $\lambda = 4$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7,5 5) Calculer B^n .

Comme T et $4I_3$ commutent, on a

$$\begin{aligned} B^n &= (4I_3 + T)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k (4I_3)^{n-k} \end{aligned}$$

Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et T^3 est la matrice nulle.

• Si $n \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} B^n &= \binom{n}{0} T^0 (4I_3)^n + \binom{n}{1} T (4I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} T^2 (4I_3)^{n-2} + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} T^k (4I_3)^{n-k}}_{=0_{3,3}} \\ &= 4^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n 4^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Si $n \leq 1$, alors $B^n = \begin{cases} I_n & \text{si } n = 0 \\ B & \text{si } n = 1 \end{cases}$

6 6) Déterminer l'expression de A^n en fonction de B^n , P et P^{-1} , et calculer A^n .

On a vu que $B = P^{-1}AP$ en question 4). Ainsi, $A = PBP^{-1}$. En particulier,

$$A^n = \underbrace{PBP^{-1}PBP^{-1} \dots PBP^{-1}}_{n \text{ fois}} = \boxed{PB^n P^{-1}}$$

Calculons à présent A^n .

• Si $n \leq 1$, alors $A^n = \begin{cases} I_n & \text{si } n = 0 \\ A & \text{si } n = 1 \end{cases}$

- Si $n \geq 2$, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & 2n & 4 + \frac{n(n-1)}{2} \\ 4 & 2n+4 & 2n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n+4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 4^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n & 2 + \frac{n(n-1)}{4} \\ 2 & n+2 & n + \frac{n(n-1)}{4} \\ 0 & 2 & n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 - n + \frac{n(n-1)}{4} & n - \frac{n(n-1)}{4} & n + \frac{n(n-1)}{4} \\ \frac{n(n-1)}{4} & 4 - \frac{n(n-1)}{4} & 2n + \frac{n(n-1)}{4} \\ n & -n & n+4 \end{pmatrix} \\
&= 4^{n-2} \begin{pmatrix} 16 - 4n + n(n-1) & 4n - n(n-1) & 4n + n(n-1) \\ n(n-1) & 16 - n(n-1) & 8n + n(n-1) \\ 4n & -4n & 4n + 16 \end{pmatrix} \\
&= 4^{n-2} \begin{pmatrix} n^2 - 5n + 16 & -n^2 + 5n & n^2 + 3n \\ n^2 - n & -n^2 + n + 16 & n^2 + 7n \\ 4n & -4n & 4n + 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice-Problème 2 : Décomposition d'endomorphisme en somme de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On note 0 l'endomorphisme nul de E et Id l'identité de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^2 - 6f + 8\text{Id} = 0$$

où on a employé la notation multiplicative pour représenter la composition d'endomorphismes.

Partie I

- 1) Montrer que f est un automorphisme de E et donner f^{-1} en fonction de f .

On a $f^2 - 6f = -8\text{Id}$ donc

$$f \circ \left(\frac{f - 6\text{Id}}{-8} \right) = \text{Id}$$

Et on montre de même que $\left(\frac{f - 6\text{Id}}{-8} \right) \circ f = \text{Id}$. Ainsi, f est inversible et $f^{-1} =$

$\boxed{\frac{6\text{Id} - f}{8}}$. Ainsi, f est un endomorphisme bijectif, donc un isomorphisme.

- 2) Calculer $(f - 2\text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})$ et $(f - 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id})$.

Un calcul direct donne :

$$(f - 2\text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = f^2 - 2f - 4f + 8\text{Id} = \boxed{0}$$

On montre de même que $(f - 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}) = \boxed{0}$.

- 3) Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) - 4x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et que $f(x) - 2x \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.

$$(f - 2\text{Id})(f(x) - 4x) = (f - 2\text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})(x) = 0(x) = 0_E$$

donc $f(x) - 4x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. On montre de même que $f(x) - 2x \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.

- 4) Soit $x \in E$. En écrivant x comme une combinaison linéaire de $f(x) - 4x$ et de $f(x) - 2x$, démontrer que :

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 4\text{Id})$$

4

On remarque que

$$x = -\frac{1}{2}(f(x) - 4x) + \frac{1}{2}(f(x) - 2x)$$

On pose $x_2 = -\frac{1}{2}(f(x) - 4x)$ et $x_4 = \frac{1}{2}(f(x) - 2x)$. Or, par la question précédente, on a $f(x) - 4x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$, donc $x_2 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ car c'est un s.e.v. De même, $x_4 \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Comme

$$x = x_2 + x_4$$

on en déduit que $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Par arbitraire sur x , on en déduit que $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 4\text{Id})$, l'autre inclusion étant évidente.

5) En déduire que :

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 4\text{Id})$$

Par la question précédente, il suffit de montrer que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 4\text{Id}) = \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.

- Comme $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$, on a $(f - 2\text{Id})(x) = 0_E$, donc $f(x) = 2x$.
- Comme $x \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$, on a $f(x) = 4x$.

Ainsi, $2x = 4x$, ou encore $2x = 0_E$, c'est-à-dire $x = 0_E$. Ainsi, $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 4\text{Id}) = \{0_E\}$, l'autre inclusion étant évidente.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie II.

6) Démontrer que l'endomorphisme $g = f - 3\text{Id}$ est une symétrie et reconnaître ses éléments caractéristiques.

On a

$$g \circ g = (f - 3\text{Id}) \circ (f - 3\text{Id}) = f^2 - 6f + 9\text{Id} = f^2 - 6f + 8\text{Id} + \text{Id} = 0 + \text{Id} = \text{Id}$$

De plus, g est linéaire par combinaison linéaire d'applications linéaires. Ainsi, g est une symétrie. On sait qu'alors g est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(g - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(g + \text{Id})$, c'est-à-dire par rapport à $\boxed{\text{Ker}(f - 4\text{Id})}$ parallèlement à $\boxed{\text{Ker}(f - 2\text{Id})}$.

7) On note p_2 le projecteur sur $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - 4\text{Id})$ et p_4 le projecteur sur $\text{Ker}(f - 4\text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Pour tout $x \in E$, déterminer $p_4(x)$ et $p_2(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

Soit $x \in E$. On a vu en question 4) que $x = x_2 + x_4$ avec

$$x_2 = -\frac{1}{2}(f(x) - 4x) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{1}{2}(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$$

Il s'agit donc de la décomposition de x selon la somme directe $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus$

$\text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Ainsi,

$$p_2(x) = x_2 = \boxed{-\frac{1}{2}(f(x) - 4x)}$$

$$p_4(x) = x_4 = \boxed{\frac{1}{2}(f(x) - 2x)}$$

8) En déduire que $f = 2p_2 + 4p_4$.

Soit $x \in E$. On a

$$2p_2(x) + 4p_4(x) = -(f(x) - 4x) + 2(f(x) - 2x) = f(x)$$

Ainsi, on a bien $f = 2p_2 + 4p_4$.

9) Montrer que $p_2 \circ p_4 = 0$ et que $p_4 \circ p_2 = 0$.

Soit $x \in E$. Par définition, $p_4(x) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Or, $\text{Ker } p_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Ainsi, $p_2(p_4(x)) = 0_E$. Par arbitraire sur x , on en déduit que $p_2 \circ p_4 = 0$. On montre de même que $p_4 \circ p_2 = 0$.

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier p_2^k et p_4^k .

Comme p_2 est un projecteur, on a $p_2 \circ p_2 = p_2$. Ainsi, par récurrence immédiate

$$p_2^k = \begin{cases} \text{Id} & \text{si } k = 0 \\ p_2 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer f^n en fonction de p_2 , p_4 et n .

Par la question 8), on a $f^n = (2p_2 + 4p_4)^n$. Comme p_2 et p_4 commutent par la

question précédente, on en déduit par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} f^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k p_2^k 4^{n-k} p_4^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} 2^0 p_2^0 4^n p_4^n + \binom{n}{n} 2^n p_2^n 4^0 p_4^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p_2^k 4^{n-k} p_4^{n-k} \\ &= 4^n p_4 + 2^n p_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k 4^{n-k} p_2 p_4 \quad \text{par la question précédente} \end{aligned}$$

Or, $p_2 p_4 = 0$ par la question 9), si bien que le dernier terme est nul. Ainsi,

$$f^n = \boxed{2^n p_2 + 4^n p_4}$$

Partie III.

- 2 12) Montrer que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 4\text{Id})$ et $\text{Im}(f - 4\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f - 2\text{Id})$. Montrons que $y \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Comme $y \in \text{Im}(f - 2\text{Id})$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f - 2\text{Id})(x)$. Ainsi,

$$(f - 4\text{Id})(y) = (f - 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id})(x) = 0(x) = 0_E$$

On en déduit que $y \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Ainsi $\text{Im}(f - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. On montre de la même manière que $\text{Im}(f - 4\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

- 13) Démontrer que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) = \text{Ker}(f - 4\text{Id})$ et $\text{Im}(f - 4\text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ de deux façons :

- a) Dans le cas où E est supposé de dimension finie, en utilisant le théorème du rang.

On a déjà montré que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\dim \text{Im}(f - 2\text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Or, par le théorème du rang appliqué à $f - 2\text{Id}$ et $f - 4\text{Id}$, on a

$$\dim \text{Im}(f - 2\text{Id}) = \dim E - \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$$

De plus, par la question 5), les espaces $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et $\text{Ker}(f - 4\text{Id})$ sont supplémentaires dans E , donc $\dim \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \dim E - \dim \text{Ker}(f - 4\text{Id})$.

4Id). Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(f - 2\text{Id}) &= \dim E - (\dim E - \dim \text{Ker}(f - 4\text{Id})) \\ &= \dim \text{Ker}(f - 4\text{Id}) \end{aligned}$$

On en conclut que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) = \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. On montre de même que $\text{Im}(f - 4\text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

- 5 b) Dans le cas général, où E est de dimension quelconque.

On a déjà montré que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$. Montrons que $x \in \text{Im}(f - 2\text{Id})$. Comme $x \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$, on a $f(x) = 4x$. On cherche $z \in E$ tel que

$$x = (f - 2\text{Id})(z) = f(z) - 2z$$

On remarque que

$$2x = f(x) - 2x = (f - 2\text{Id})(x)$$

et donc

$$x = (f - 2\text{Id})\left(\frac{x}{2}\right)$$

En posant $z = \frac{x}{2}$, on a bien $x = (f - 2\text{Id})(z)$, donc $x \in \text{Im}(f - 2\text{Id})$. Finalement, $\text{Ker}(f - 4\text{Id}) \subset \text{Im}(f - 2\text{Id})$. D'où $\text{Ker}(f - 4\text{Id}) = \text{Im}(f - 2\text{Id})$. On montre de même que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Im}(f - 4\text{Id})$.

25 Exercice 3 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice carrée M , on notera sa trace $\text{Tr}(M)$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note φ_A l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi_A(B) = \text{Tr}(AB)$.

- 7 1) Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.

Tout d'abord, montrons que Φ est linéaire. Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\Phi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \varphi_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}$$

$$\alpha_1 \Phi(A_1) + \alpha_2 \Phi(A_2) = \alpha_1 \varphi_{A_1} + \alpha_2 \varphi_{A_2}$$

Pour conclure, il faut donc montrer l'égalité des deux applications dans les membres de droites ci-dessus. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par linéarité de la trace :

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}(B) &= \text{Tr}((\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)B) \\ &= \alpha_1 \text{Tr}(A_1 B) + \alpha_2 \text{Tr}(A_2 B) \\ &= \alpha_1 \varphi_{A_1}(B) + \alpha_2 \varphi_{A_2}(B) \end{aligned}$$

Par arbitraire sur B , on a donc bien $\varphi_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \alpha_1 \varphi_{A_1} + \alpha_2 \varphi_{A_2}$. On en conclut que Φ est linéaire. Montrons à présent que Φ est bijective. Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que Φ est injective. Soit donc $A \in \text{Ker } \Phi$. Montrons que A est la matrice nulle. Comme $\Phi(A) = \varphi_A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*}$, on en déduit que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Tr}(AB) = 0$$

En particulier, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut prendre $B = E_{ij}$ la matrice élémentaire d'indice (i, j) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} B_{\ell k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} \delta_{i\ell} \delta_{jk} \\ &= A_{ji} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A_{ji} = \text{Tr}(AB) = 0$, donc A est nulle. Φ est donc injective, c'est un isomorphisme.

2) On considère $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad (M \in \mathcal{H} \iff \text{Tr}(AM) = 0)$$

7

Comme $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut l'écrire comme le noyau d'une forme linéaire non nulle ψ , i.e. $\mathcal{H} = \text{Ker } \psi$. Cependant, par la question précédente, Φ est bijective, donc surjective : la forme linéaire ψ admet donc un antécédent par Φ . Ainsi, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\psi = \Phi(A) = \varphi_A$. On en déduit que

$$\mathcal{H} = \text{Ker } \varphi_A$$

En particulier, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$M \in \mathcal{H} \iff \varphi_A(M) = 0 \iff \text{Tr}(AM) = 0$$

d'où le résultat voulu.

b) Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dans cette question uniquement, on suppose que $A = J_r$, où J_r est la matrice dont les coefficients sont égaux à δ_{ij} , si $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ et 0 sinon. Démontrer que $\mathcal{H}$ contient une matrice inversible.

Par la question précédente, il suffit de trouver une matrice M inversible telle que $\text{Tr}(J_r M) = 0$.

• Si $r \geq 2$, on peut poser :

$$M = \begin{pmatrix} -r+1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -rE_{11} + I_n$$

C'est bien une matrice inversible car elle est échelonnée avec n pivots. De plus, par produit de matrices diagonales,

$$J_r M = \begin{pmatrix} -r+1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = -rE_{11} + J_r$$

Ainsi, $\text{Tr}(J_r M) = -r \text{Tr}(E_{11}) + \text{Tr}(J_r) = -r \times 1 + r = 0$. D'où $M \in \mathcal{H}$ et M est inversible.

4

- Si $r = 1$, alors on peut poser :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. M est la matrice de permutation associée aux indices 1 et 2. Cela montre que M est inversible (avec $M^{-1} = M$). De plus, $J_r M$, ou encore $J_1 M$, est la matrice obtenue en permutant les colonnes 1 et 2 de J_1 , ce qui donne :

$$J_1 M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{Tr}(J_1 M) = 0$. On en déduit que $M \in \mathcal{H}$.

$N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(J_r N) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}(J_r N) \\ &= \text{Tr}(J_r Q Q^{-1} N P^{-1} P) \\ &= \text{Tr}(P J_r Q Q^{-1} N P^{-1}) \\ &= \text{Tr}(A Q^{-1} N P^{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $M = Q^{-1} N P^{-1}$, on obtient $\text{Tr}(AM) = 0$. Donc $M \in \mathcal{H}$. De plus M est inversible en tant que produit de matrices inversibles. D'où le résultat.

15,5 Exercice 4 : Les morphismes transformistes

Soit E un e.v. et f, g, h des endomorphismes de E . On utilisera la notation multiplicative sur $\mathcal{L}(E)$, de sorte que fg désigne la composée $f \circ g$. On suppose que f, g et h vérifient $f = gh$, $g = hf$ et $h = fg$.

- 3,5 1) Montrer que f, g et h ont le même noyau et ont la même image.

Soit $x \in \text{Ker } f$. Alors comme $g = hf$, on a $g(x) = h(f(x)) = h(0_E) = 0_E$ donc $x \in \text{Ker } g$. Ainsi $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$. De même, on montre que $\text{Ker } g \subset \text{Ker } h$ et que $\text{Ker } h \subset \text{Ker } f$. Donc $\boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } g = \text{Ker } h}$.

Soit $y \in \text{Im } f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = g(h(x))$. En particulier, $y = g(z)$ avec $z = h(x) \in E$, donc $y \in \text{Im } g$. Ainsi, $\text{Im } f \subset \text{Im } g$. On montre de même que $\text{Im } g \subset \text{Im } h$ et $\text{Im } h \subset \text{Im } f$. Finalement, $\boxed{\text{Im } f = \text{Im } g = \text{Im } h}$.

- 6 2) Montrer que $f^5 = f$.

On remarque que

$$f^2 = f(gh) = (fg)h = h^2$$

et

$$g^2 = g(hf) = (gh)f = f^2$$

7

- c) En déduire que $\mathcal{H}$ contient une matrice inversible dans le cas général.

Par la question a) , il suffit de trouver une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\text{Tr}(AM) = 0$$

On sait que A est équivalente à la matrice J_r avec $r = \text{rg}(A)$, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P J_r Q$$

- Si $r = 0$, alors $J_r = J_0 = 0_{n,n}$, c'est la matrice nulle et on peut poser $M = I_n$ (par exemple) qui est bien inversible et vérifie $\text{Tr}(AM) = 0$, donc $M \in \mathcal{H}$. Note : en fait le cas $r = 0$ ne peut pas arriver car il conduit à $\mathcal{H} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors que $\mathcal{H}$ est un hyperplan donc de dimension strictement inférieure à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $r \geq 1$, par la question précédente, il existe une matrice inversible

si bien que $f^2 = g^2 = h^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^5 &= f f^2 f^2 \\ &= f g^2 h^2 \\ &= (fg)(gh)h \\ &= hfh \\ &= gh \\ &= f \end{aligned}$$

donc $x_K \in \text{Ker}(f)$.

Finalement, $x \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Cela montre bien que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ par arbitraire sur x , l'autre inclusion étant évidente.

En définitive, on a donc montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

6 3) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Montrons que $y = 0_E$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En appliquant f^4 , on obtient $f^4(y) = f^4(f(x)) = f^5(x) = f(x)$ par la question précédente. Ainsi, $f^4(y) = y$. Or, $y \in \text{Ker}(f)$, donc $f^4(y) = f^3(0_E) = 0_E$. Ainsi, $y = 0_E$. On a donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Montrons que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe $x_K \in \text{Ker}(f)$ et $x_I \in \text{Im}(f)$ tels que $x = x_K + x_I$. On procède par analyse-synthèse.

- Analyse : soit x_K, x_I qui vérifient les conditions ci-dessus. On a alors qu'il existe $x' \in E$ tel que $x_I = f(x')$. De plus,

$$f(x) = f(x_K) + f(x_I)$$

d'où

$$f(x) = 0_E + f^2(x')$$

On applique f^3 des deux côtés, de sorte que

$$f^4(x) = f^5(x') = f(x') = x_I$$

On en déduit que nécessairement $x_I = \boxed{f^4(x)}$, et que par suite

$$x_K = x - x_I = \boxed{x - f^4(x)}$$

- Synthèse : vérifions que les valeurs trouvées pour x_K et x_I vérifient les conditions demandées. On a d'une part $x = x_K + x_I$ de manière évidente. De plus, $x_I = f(f^3(x))$ donc $x_I \in \text{Im}(f)$. Enfin,

$$f(x_K) = f(x) - f^5(x) = f(x) - f(x) = 0_E$$